

Model Matematika SEIPRS Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pengaruh Vaksinasi dan Pengobatan

Muhammad Afrizal Beta^{1*}, Karmila Mokoginta², Ana Nadiyah³

^{1,2,3} Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

Info Artikel

*Penulis Korespondensi.

Email:

muhafrizalbeta@gmail.com

Submit: 28 Januari 2022

Direvisi: 19 Februari 2022

Disetujui: 20 Februari 2022

Copyright ©2022 by Author(s).

Diterbitkan oleh:

Scimadly Publishing

Under the licence CC BY-SA 4.0

Abstrak

Pneumonia adalah suatu infeksi atau peradangan akut yang terletak pada jaringan paru dan disebabkan oleh beberapa mikroorganisme, seperti bakteri, virus, parasite, jamur bahkan pajanan bahan kimia atau kerusakan pada fisik. Pada artikel ini dibahas model matematika SEIPRS pada penyebaran penyakit pneumonia. Model matematika SEIPRS terbentuk dari lima populasi yang saling berinteraksi yaitu populasi *Susceptible* adalah individu sehat tetapi rentan terhadap penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan S, populasi *Exposed* adalah individu laten atau terpapar penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan E, populasi *Infected* adalah individu terinfeksi penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan I, dan populasi pengobatan adalah individu terinfeksi yang diberi pengobatan yang dinotasikan dengan P, dan populasi yang *recovery* adalah populasi yang sembuh yang dinotasikan dengan R. Dalam artikel ini, dilakukan pencarian titik kesetimbangan pada model matematika SEIPRS dan dilakukan analisis kestabilan. Analisis pada model ini menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan tanpa penyakit pada kondisi $R_0 < 1$, titik kesetimbangan endemik $R_0 > 1$, dan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai nilai ambang batas terjadinya penyebaran penyakit. Pada penelitian ini dilakukan simulasi dilakukan variasi pada nilai-nilai parameter untuk melihat dinamika populasi. Hasil populasi menunjukkan bahwa peningkatan laju vaksinasi dan pengobatan dapat menekan laju penyebaran penyakit pneumonia.

Kata Kunci: Pneumonia; Model Matematika; Vaksinasi; Bilangan Reproduksi Dasar; Pengobatan

Abstract

Pneumonia is an infection or acute inflammation located in the lung tissue and is caused by several microorganisms, such as bacteria, viruses, parasites, fungi and even exposure to chemicals or physical damage. In this article, we discuss the SEIPRS mathematical model on the spread of pneumonia. The SEIPRS mathematical model is formed from five interacting populations, namely the Susceptible population is healthy individuals but susceptible to pneumonia which is denoted by S, the Exposed population is latent individuals or exposed to pneumonia which is denoted by E, the Infected population is individuals infected with pneumonia which is denoted by I, and the treatment population is infected individuals who are given treatment denoted by P, and the recovered population is the recovered population denoted by R. In this article, the search for equilibrium points in the SEIPRS mathematical model and stability analysis is carried out. The analysis in this model produces two equilibrium points, namely the equilibrium point without disease at the condition $R_0 < 1$, the endemic equilibrium point $R_0 > 1$, and the basic reproduction number (R_0) as the threshold value for the spread of disease. In this study, simulations were carried out with variations in parameter values to see population dynamics. Population results show that increasing rates of vaccination and treatment can reduce the rate of spread of pneumonia.

Keywords: Pneumonia; Mathematical Model; Vaccination; Basic Reproduction Number; Treatment

1. Pendahuluan

Dalam sebuah kehidupan yang dialami setiap makhluk hidup tidak lepas dari peristiwa atau permasalahan yang dialami dengan bentuk yang berbeda-beda dan dapat dijelaskan dalam bentuk model matematika. Pemodelan matematika dapat berperan untuk menjelaskan dan mempresentasikan sebuah permasalahan pada dunia nyata ke dalam bentuk pernyataan secara matematis [1]. Pemodelan matematika dapat berperan dalam segala aspek bidang ilmu pengetahuan, seperti biologi, geologi, ekonomi, kesehatan dan sebagainya yang serupa. Dalam hal ini pemodelan matematika dapat pula menyatakan sebuah peristiwa seperti penyebaran penyakit. Salah satu bentuk peristiwa penyebaran penyakit yang akan dibahas pada penelitian ini adalah penyakit pneumonia.

Menurut Perhimpunan Dokter Paru Indonesia (PDPI) dalam jumpa pers, Pneumonia adalah suatu infeksi atau peradangan akut yang terletak pada jaringan paru dan disebabkan oleh beberapa mikroorganisme, seperti bakteri, virus, parasite, jamur bahkan paparan bahan kimia atau kerusakan pada fisik. Kasus pneumonia menjadi masalah utama bagi Indonesia. Berdasarkan data perkiraan kemenkes pada tahun 2019, pneumonia dapat menyebabkan 885.551 kematian pada balita, yakni terdapat sebesar 0,12% angka kematian pada balita dan mencapai dua kali lipat pada bayi. Safitri, Nesyana dan Gayatri [2] dalam hasil penelitiannya bahwa pneumonia kebanyakan diderita oleh kelompok usia lanjut akibat penyakit kronik sehingga menyebabkan kerusakan pada sistem imunitas tubuh. Menurut data perkiraan badan kesehatan dunia atau World Health Organization (WHO), terdapat 450 juta laporan kasus pneumonia dalam setiap tahunnya. Dalam hal ini diperoleh 7% (4 juta) dari jumlah keseluruhan angka kematian (57 juta kematian), indeks tertinggi terdapat pada usia kurang dari lima tahun dan usia lanjut yang berumur lebih dari 75 tahun [3][4].

Penggunaan model matematika sebagai penyelesaian permasalahan dalam sebuah peristiwa telah diteliti sebelumnya. Jacob dkk [5] dalam hasil penelitiannya memodelkan bahwa pneumonia dapat berasal dari bawaan sejak lahir dan berpengaruh terhadap kelas rentan. Rahmawati [6] dalam hasil penelitiannya melakukan penambahan pada model dengan memperhatikan bahwa tingkat kekebalan tubuh individu yang telah sehat dapat menurun setelah dua tahun kemudian individu dinyatakan rentan kembali. Malorung dkk [7] dalam hasil penelitiannya memodelkan penyebaran penyakit pneumonia yang dititik beratkan pada sensitivitas vaksinasi terhadap penyebaran penyakit pneumonia. Kemudian Rahman dkk [8] dalam hasil penelitiannya memodelkan penyebaran penyakit pneumonia dengan memperhatikan dampak dari vaksinasi dan pengobatan. Penelitian lain juga dilakukan oleh Imran dkk [9] dengan melakukan pengembangan bahwa dalam penyakit pneumonia terdapat individu rentan yang terinfeksi belum menunjukkan gejala klinis dan menular serta menambahkan pengobatan bagi individu yang terinfeksi dan memperhatikan faktor imunisasi.

Dalam penelitian ini, model penyebaran penyakit pneumonia dari Imran [9] dimodifikasi dengan tidak memperhatikan bahwa pneumonia berasal dari bawaan sejak lahir, melainkan dipengaruhi oleh kontak langsung dengan individu yang terinfeksi serta menambahkan bahwa terdapat individu laten yang dapat sembuh atau berkemungkinan untuk tidak terkena penyakit pneumonia karena dipengaruhi oleh faktor vaksinasi [10] sehingga individu yang telah sembuh dapat kembali rentan akibat adanya individu laten yang tidak mengalami fase pengobatan bercampur dengan individu yang telah mengalami fase pengobatan kemudian sembuh. Setelah itu, dibentuk persamaan diferensial yang sesuai dengan penyebaran penyakit pneumonia dengan faktor vaksinasi dan pengobatan, kemudian dilakukan perhitungan perilaku terhadap titik keseimbangan untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan dan melihat simulasi numerik tentang dinamika penyebaran penyakit pneumonia.

2. Metode Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan metode studi literatur yang dilakukan untuk mencermati, mendalami, menelaah, serta mengidentifikasi pengetahuan untuk menunjang penelitian. Sumber yang digunakan berupa buku, jurnal, skripsi, tesis, atau internet. Langkah-langkah pembentukan model

matematika yaitu: (1) Mengidentifikasi masalah, dengan membaca serta memahami literatur berkaitan dengan penyakit Pneumonia dan pemodelan matematika, sehingga dapat ditentukan sub-sub populasi yang di gunakan pada model; (2) Membuat Asumsi, dengan pembuatan model matematika bahwa penyebaran penyakit Pneumonia dipengaruhi oleh kontak langsung dengan individu yang terinfeksi; (3) Menginterpretasikan dan Menyelesaikan Model, perlu diselesaikan dengan cara matematika yaitu melakukan analisis parameter dan mencari titik kritis, nilai eigen, dan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0); (4) Verifikasi Model, setelah melakukan analisis pada model, perlu simulasi model. Simulasi untuk menguji hasil analisis dengan melihat pengaruh parameter.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Matematika

Model matematika terbentuk dari lima populasi yang saling berinteraksi yaitu populasi *Susceptible* adalah individu sehat tetapi rentan terhadap penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan S, populasi *Exposed* adalah individu laten atau terpapar penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan E, populasi *Infected* adalah individu terinfeksi penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan I, dan populasi pengobatan adalah individu terinfeksi yang diberi pengobatan yang dinotasikan dengan P, dan populasi yang *recovery* adalah populasi yang sembuh yang dinotasikan dengan R. Adapun parameter yang terdapat dalam model ini disajikan dalam Tabel 1

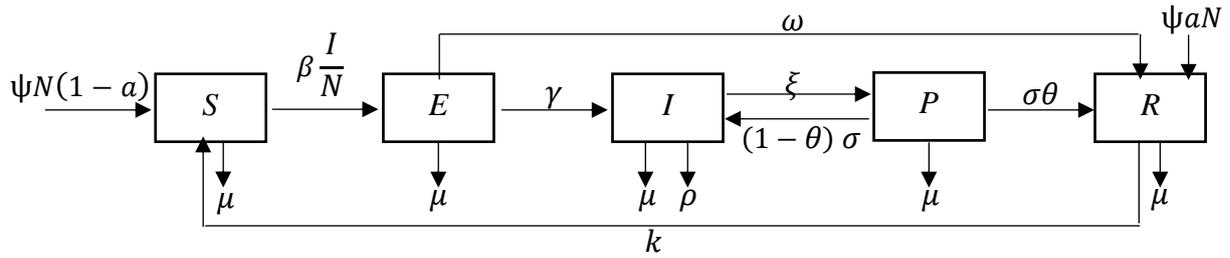
Tabel 1. Keterangan Parameter Model

Parameter	Keterangan
ψ	Laju kelahiran
μ	Laju kematian alami
ρ	Laju kematian akibat terinfeksi
β	Laju individu rentan menjadi individu laten
γ	Laju individu laten menjadi individu terinfeksi
ξ	Laju individu terinfeksi yang menjalani pengobatan
σ	Peluang individu yang menjalani pengobatan kemudian sembuh
ω	Peluang individu laten menjadi individu sembuh
k	Laju individu sembuh menjadi rentan akibat hilangnya kekebalan tubuh
θ	Proporsi individu kelas pengobatan
α	Proporsi individu kelas vaksinasi

Beberapa asumsi yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Populasi bersifat tertutup, artinya penambahan atau pengurangan populasi hanya dikarenakan oleh kelahiran.
2. Setiap individu yang lahir tidak mendapat vaksinasi akan rentan terhadap penyakit pneumonia.
3. Penyakit dapat menyebabkan kematian.
4. Penyakit pneumonia memiliki periode laten yang terinfeksi dan periode laten yang dapat sembuh
5. Individu yang mengalami pengobatan dapat sembuh.
6. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lain.
7. Individu terinfeksi ada kemungkinan meninggal karena penyakit pneumonia.
8. Individu laten/terpapar yang telah mengalami vaksinasi ada kemungkinan untuk sembuh.
9. Individu yang sehat atau pulih dapat rentan kembali karena penyakit pneumonia akibat hilangnya kekebalan tubuh.

Berdasarkan asumsi, secara skematis proses penyebaran penyakit pneumonia dalam suatu populasi dapat disajikan dalam penyakit pneumonia dengan pengaruh vaksinasi dan pengobatan pada Gambar 1



Gambar 1. Skema Populasi Model SEIPRS untuk Penyebaran Penyakit Pneumonia

Selanjutnya dalam skema proses penyebaran penyakit pneumonia pada Gambar 1, diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \psi N(1-a) + kR - \left(\beta \frac{I}{N} + \mu\right)S \\ \frac{dE}{dt} = \left(\beta \frac{I}{N}\right)S - (\omega + \gamma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \gamma E - (\xi + \mu + \rho)I + (1-\theta)\sigma P \\ \frac{dP}{dt} = \xi I - ((1-\theta)\sigma + \sigma\theta + \mu)P \\ \frac{dR}{dt} = a\omega E + \sigma\theta P + \psi\alpha N - (\mu + k)R \end{cases} \quad (1)$$

Dari persamaan diatas untuk memudahkan proses analisis model matematika, proporsi banyaknya individu pada masing-masing dalam suatu kelompok dapat dinyatakan sebagai berikut dengan $s = \frac{S}{N}$, $e = \frac{E}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, $p = \frac{P}{N}$, $r = \frac{R}{N}$, sehingga diperoleh

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \psi(1-a) + kr - (\beta i + \mu)s \\ \frac{de}{dt} = (\beta i)s - (\omega + \gamma + \mu)e \\ \frac{di}{dt} = \gamma e - (\xi + \mu + \rho)i + (1-\theta)\sigma p \\ \frac{dp}{dt} = \xi i - ((1-\theta)\sigma + \sigma\theta + \mu)p \\ \frac{dr}{dt} = a\omega e + \sigma\theta p + \psi\alpha - (\mu + k)r \end{cases} \quad (2)$$

3.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dari sistem persamaan (2) ditentukan berdasarkan persamaan berikut : $\frac{ds}{dt} = 0$, $\frac{de}{dt} = 0$, $\frac{di}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$ dan $\frac{dr}{dt} = 0$. Dari penyelesaian Persamaan (2) diperoleh dua titik keseimbangan, yaitu Titik Keseimbangan Tanpa Penyakit Pneumonia (E_0)

$$E_0 = (s, e, i, p, r) = \left(\frac{(k + \mu - \alpha\mu)\psi}{\mu(k + \mu)}, 0, 0, 0, r \rightarrow \frac{\alpha\psi}{k + \mu} \right)$$

dan Titik Kesetimbangan Endemik (E_1)

$$E_1 = (s, e, i, p, r) = s^* e^* i^* p^* r^*$$

dengan

$$s^* = \frac{kr + \psi - \alpha\psi}{i\beta + \mu}; e^* = \frac{is\beta}{\gamma + \mu + \omega}; i^* = \frac{e\gamma + p\sigma - p\theta\sigma}{\mu + \xi + \rho};$$

$$p^* = \frac{i\xi}{\mu + \sigma}; r^* = \frac{p\theta\sigma + \alpha\psi + e\alpha\omega}{k + \mu}$$

3.3 Bilangan Reproduksi Dasar R_0

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) ditentukan berdasarkan sistem persamaan (2) dengan memperhatikan titik kesetimbangan tanpa penyakit pneumonia yakni (E_0). Bilangan reproduksi dasar dapat dicari dengan menggunakan metode *Next-Generation Matrix* yang dinotasikan dengan K (Lihat [11]-[14]).

Next-Generation Matrix (K) diperoleh dari populasi yang terinfeksi pada sistem persamaan (2). sehingga kelas populasi terinfeksi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= (\beta i)s - (\omega + \gamma + \mu)e \\ \frac{di}{dt} &= \gamma e - (\xi + \mu + \rho)i + (1 - \theta)\sigma p \\ \frac{dp}{dt} &= \xi i - ((1 - \theta)\sigma + \sigma\theta + \mu)p \end{aligned} \quad (3)$$

Sehingga berdasarkan sistem persamaan (3) diperoleh matriks F dan V sebagai berikut.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ 0 & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

dengan

$$\begin{aligned} v_{11} &= \omega + \gamma + \mu & v_{23} &= -\gamma e + (\xi + \mu + \rho) - (1 - \theta)\sigma p \\ v_{21} &= -\gamma + (\xi + \mu + \rho)i - (1 - \theta)\sigma p & v_{32} &= -\xi + ((1 - \theta)\sigma + \sigma\theta + \mu)p \\ v_{22} &= -\gamma e + (\xi + \mu + \rho) - (1 - \theta)\sigma p & v_{33} &= -\xi i + ((1 - \theta)\sigma + \sigma\theta + \mu) \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi titik kesetimbangan tanpa penyakit Pneumonia yakni $E_0 = (s, e, i, p, r) = \left(\frac{(k + \mu - \alpha\mu)\psi}{\mu(k + \mu)}, 0, 0, 0, \frac{\alpha\psi}{k + \mu} \right)$ pada persamaan (4), sehingga diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta(k + \mu - \alpha\mu)\psi}{\mu(k + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \omega + \gamma + \mu & 0 & 0 \\ -\gamma & \mu + \xi + \rho & (-1 + \theta)\sigma \\ 0 & -\xi & \sigma + \mu \end{bmatrix} \quad (5)$$

Radius spektral adalah $\max\{|\lambda_i|\}$ dengan nilai eigen dari matriks K , sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta(k + \mu - \alpha\mu)(\gamma\mu + \gamma\sigma)\psi}{\mu(k + \mu)(\mu^2 + \mu\xi + \mu\rho + \mu\sigma + \theta\xi\sigma + \rho\sigma)(\gamma + \mu + \omega)} \quad (6)$$

3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan model dapat dilakukan dengan memanfaatkan sistem yang telah dilnearkan. Dalam hal ini, pelinearan dilakukan dengan menggunakan matriks jacobian [15] pada sistem persamaan (2) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta s & 0 & k \\ 0 & -\gamma - \mu - \omega & \beta s & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \xi - \rho & (1 - \theta)\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -\mu - (1 - \theta)\sigma - \theta\sigma & 0 \\ 0 & \alpha\omega & 0 & \theta\sigma & -k - \mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

3.4.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Tanpa Penyakit

Persamaan linearisasi titik kesetimbangan E_0 diperoleh dengan melakukan pensubstiusian titik kesetimbangan E_0 pada matriks Jacobi (7), sehingga menghasilkan matriks $J(E_0)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & A_{15} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 \\ 0 & A_{52} & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \quad (8)$$

diperoleh:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\mu & A_{34} &= (1 - \theta)\sigma \\ A_{13} &= -\frac{\beta(k+\mu-\alpha\mu)\psi}{\mu(k+\mu)} & A_{43} &= \xi \\ A_{22} &= -\gamma - \mu - \omega & A_{44} &= -\mu - (1 - \theta)\sigma - \theta\sigma \\ A_{23} &= \frac{\beta(k+\mu-\alpha\mu)\psi}{\mu(k+\mu)} & A_{52} &= \alpha\omega \\ A_{32} &= \gamma & A_{54} &= \theta\sigma \\ A_{33} &= -\mu - \xi - \rho & A_{55} &= -k - \mu \end{aligned}$$

Langkah berikutnya yaitu mencari persamaan karakteristik matriks jacobian dari Persamaan (13). hal ini dapat diperoleh dengan menentukan $\det(\lambda I - J(E_0)) = 0$, sehingga diperoleh persamaan,

$$(-A_{11} + \lambda)(-A_{55} + \lambda)(-A_{43}(-A_{22}A_{34} + A_{34}\lambda) + (-A_{44} + \lambda)(-A_{23}A_{32} + A_{22}A_{33} - A_{22}\lambda - A_{33}\lambda + \lambda^2)) = 0 \quad (9)$$

Berdasarkan persamaan (9) diperoleh lima nilai eigen. Dua nilai eigen diantaranya adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A_{11} = -\mu \\ \lambda_2 &= A_{55} = -k - \mu \end{aligned}$$

Karena elemen A_{11} dan A_{55} bernilai positif maka apabila disubstitusi diperoleh $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, dan untuk ketiga nilai eigen lainnya diperoleh dengan menyelesaikan persamaan kubik berikut

$$\lambda^3 + (-A_{44} - A_{22} - A_{33})\lambda^2 + (-A_{43}A_{34} + A_{44}A_{22} + A_{44}A_{33} - A_{23}A_{32} + A_{22}A_{43})\lambda + A_{43}A_{22}A_{34} + A_{44}A_{23}A_{32} - A_{44}A_{22}A_{33} \quad (10)$$

Persamaan (15) dapat ditulis

$$a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (11)$$

dengan,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \gamma + 3\mu + \xi + \rho + \sigma + \omega, \quad a_3 = p_1 - p_2, \quad a_4 = p_3 - p_4$$

dimana

$$p_1 = 3\mu^2 + (\theta\xi + \rho)\sigma + \gamma(2\mu + \xi + \rho + \sigma - \frac{\beta(k+\mu-\alpha\mu)\psi}{\mu(k+\mu)})$$

$$p_2 = (\xi + \rho + \sigma)\omega + 2\mu(\xi + \rho + \sigma + \omega)$$

$$p_3 = \frac{k(\gamma\mu(\mu + \xi + \rho) + (\mu + \theta\xi + \rho)\sigma) - \beta\gamma(\mu + \sigma)\psi + \mu(\mu(\mu + \xi + \rho) + (\mu + \theta\xi + \rho)\sigma)(\mu + \omega)}{\mu(k + \mu)}$$

$$p_4 = \frac{\mu(\gamma\mu(\mu + \xi + \rho) + (\mu + \theta\xi + \rho)\sigma) + (-1 + \alpha)\beta\gamma(\mu + \sigma)\psi + \mu(\mu(\mu + \xi + \rho) + (\mu + \theta\xi + \rho)\sigma)(\mu + \omega)}{\mu(k + \mu)}$$

Akar-akar Persamaan (11) adalah nilai eigen lain dari persamaan (9) yaitu $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Berdasarkan sifat akar persamaan kubik, diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= -a_1 \\ \lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5 + \lambda_4\lambda_5 &= a_2 \\ \lambda_3\lambda_4\lambda_5 &= -a_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan persamaan karakteristik (16) memiliki bagian real negatif. Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz persamaan (16) menjadi

$$c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0 \tag{13}$$

- (i) Menunjukkan $c_2 > 0$
 Karena semua parameter bernilai positif maka $c_2 > 0$ jika $\gamma + 3\mu + \xi + \rho + \sigma + \omega > 0$
- (ii) Tinjau $c_3 > 0$, jika $p_1 > p_2$
 $p_1 > p_2$
 $p_1 - p_2 > 0$
 $p_1 - p_2 = b_3 > 0$
- (iii) Tinjau $c_4 > 0$, jika $p_3 > p_4$
 $p_3 > p_4$
 $p_3 - p_4 > 0$
 $p_3 - p_4 = b_4 > 0$

Karena $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ dan untuk persamaan karakteristik $c_2 > 0, c_3 > 0$ dan $c_4 > 0$ maka kondisi tersebut memenuhi persamaan (13) yang menyebabkan persamaan akar-akar real negatif. Dengan $c_3 > 0$ memenuhi kondisi berikut

$$\lambda_3(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 > 0 \tag{14}$$

$$\lambda_3\lambda_4\lambda_5 < 0 \tag{15}$$

karena $c_1 > 0$ maka $\lambda_3 < 0$, dengan ini kondisi ini diperoleh

$$\lambda_4\lambda_5 > 0 \tag{16}$$

Sehingga berdasarkan kondisi (19) dan (21) diperoleh

$$\lambda_4 + \lambda_5 > 0 \tag{17}$$

dengan demikian semua nilai eigen dari persamaan karakteristik (11) bernilai negatif yaitu $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0$. Jadi terbukti bahwa sistem (2) bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$

3.4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Persamaan linearisasi titik kesetimbangan E_1 diperoleh dengan melakukan pensubstitusian titik kesetimbangan E_1 pada matriks Jacobi (12), sehingga menghasilkan matriks $J(E_1)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & B_{43} & B_{44} & 0 \\ 0 & B_{52} & 0 & B_{54} & B_{55} \end{bmatrix} \quad (18)$$

dengan,

$$B_{11} = -\mu + \frac{k(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma) - \beta\gamma(\mu+\sigma)\psi + \mu(\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega) + \mu(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma) + (-1+\alpha)\beta\gamma(\mu+\sigma)\psi + \mu(\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega)}{\mu(\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\gamma+\mu+\omega) + k(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho) + \gamma(\mu+\rho)\sigma + (\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega - \alpha\omega))}$$

$$B_{13} = -\frac{(\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\gamma+\mu+\omega)}{\gamma(\mu+\sigma)}$$

$$B_{15} = k$$

$$B_{21} = -\frac{k(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma) - \beta\gamma(\mu+\sigma)\psi + \mu(\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega) + \mu(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma) + (-1+\alpha)\beta\gamma(\mu+\sigma)\psi + \mu(\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega)}{\mu(\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\gamma+\mu+\omega) + k(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho) + \gamma(\mu+\rho)\sigma + (\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega - \alpha\omega))}$$

$$B_{22} = -\gamma - \mu - \omega$$

$$B_{23} = \frac{(\mu(\mu+\xi+\rho) + (\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\gamma+\mu+\omega)}{\gamma(\mu+\sigma)}$$

$$B_{32} = \gamma$$

$$B_{33} = -\mu - \xi - \rho$$

$$B_{34} = (1 - \theta)\sigma$$

$$B_{43} = \xi$$

$$B_{44} = -\mu - (1 - \theta)\sigma - \theta\sigma$$

$$B_{52} = \alpha\omega$$

$$B_{54} = \theta\sigma$$

$$B_{55} = -k - \mu$$

Langkah berikutnya yaitu mencari persamaan karakteristik matriks jacobian dari Persamaan (18). hal ini dapat diperoleh dengan menentukan $\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$, sehingga diperoleh persamaan,

$$B_{15}(-B_{21}B_{34}B_{43}B_{52} + B_{21}B_{33}B_{44}B_{52} + B_{21}B_{32}B_{43}B_{54} - B_{21}B_{33}B_{52}\lambda - B_{21}B_{44}B_{52}\lambda + B_{21}B_{52}\lambda^2) + (-B_{55} + \lambda)(-B_{43}(B_{11}B_{22}B_{34} - B_{11}B_{34}\lambda - B_{22}B_{34}\lambda + B_{34}\lambda^2) + (-B_{44} + \lambda)(B_{13}B_{21}B_{32} + B_{11}B_{23}B_{32} - B_{11}B_{22}B_{33} + B_{11}B_{22}\lambda - B_{23}B_{32}\lambda + B_{11}B_{33}\lambda + B_{22}B_{33}\lambda - B_{11}\lambda^2 - B_{22}\lambda^2 - B_{33}\lambda^2 + \lambda^3)) = 0 \quad (19)$$

Berdasarkan Persamaan (19) diperoleh lima nilai eigen. Satu diantaranya adalah

$$\lambda = B_{55} = -k - \mu$$

Karena elemen A_{55} bernilai positif maka apabila disubstitusi diperoleh $\lambda_1 < 0$ dan untuk keempat nilai eigen lainnya diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\lambda^4 + (-B_{44} - B_{11} - B_{22} - B_{33})\lambda^3 + (-B_{43}B_{34} + B_{44}B_{11} + B_{44}B_{22} + B_{44}B_{33} + B_{11}B_{22} - B_{23}B_{32} + B_{11}B_{33} + B_{22}B_{33})\lambda^2 + (B_{43}B_{11}B_{34} + B_{43}B_{22}B_{34} - B_{44}B_{11}B_{22} + B_{44}B_{23}B_{32} - B_{44}B_{11}B_{33} - B_{44}B_{22}B_{33} + B_{13}B_{32} + B_{11}B_{23}B_{32} - B_{11}B_{22}B_{33})\lambda - B_{43}B_{11}B_{22}B_{34} - B_{44}B_{13}B_{32} - B_{44}B_{11}B_{23}B_{32} + B_{44}B_{11}B_{23} = 0 \quad (20)$$

Persamaan (25) dapat ditulis

$$b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0 \quad (21)$$

dengan,

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = \gamma + 4\mu + \xi + \rho + \sigma + \omega$$

$$b_3 = q_1 - q_2$$

$$b_4 = q_3 - q_4$$

$$b_5 = q_5 - q_6$$

Dimana

$$q_1 = 6\mu^2 + (\theta\xi + \rho)\sigma + \gamma(3\mu + \xi + \rho + \sigma - \frac{\beta(k+\mu-\alpha\mu)\psi}{\mu(k+\mu)})$$

$$q_2 = (\xi + \rho + \sigma)\omega + 3\mu(\xi + \rho + \sigma + \omega)$$

$$q_3 = 4\mu^3 + \gamma(3\mu^2 + (\theta\xi + \rho)\sigma + 2\mu(\xi + \rho + \sigma) - \frac{\beta(k+\mu-\alpha\mu)(2\mu+\sigma)\psi}{\mu(k+\mu)})$$

$$q_4 = (\theta\xi + \rho)\sigma\omega + 3\mu^2(\xi + \rho + \sigma + \omega) + 2\mu((\theta\xi + \rho)\sigma + (\xi + \rho + \sigma)\omega)$$

$$q_5 = \frac{k(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)-\beta\gamma(\mu+\sigma)\psi+\mu(\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega)}{k+\mu}$$

$$q_6 = \frac{\mu(\gamma\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)+(-1+\alpha)\beta\gamma(\mu+\sigma)\psi+\mu(\mu(\mu+\xi+\rho)+(\mu+\theta\xi+\rho)\sigma)(\mu+\omega)}{k+\mu}$$

Selanjutnya ditunjukkan persamaan karakteristik (21) memiliki bagian real negatif. Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz persamaan (21) menjadi

$$d_1\lambda^4 + d_2\lambda^3 + d_3\lambda^2 + d_4\lambda + d_5 = 0 \quad (22)$$

- (i) Menunjukkan $d_2 > 0$
 Karena semua parameter bernilai positif maka $d_2 > 0$ jika $\gamma + 4\mu + \xi + \rho + \sigma + \omega$
- (ii) Tinjau $d_3 > 0$, jika $p_1 > p_2$
 $p_1 > p_2$
 $p_1 - p_2 > 0$
 $p_1 - p_2 = d_3 > 0$
- (iii) Tinjau $d_4 > 0$, jika $p_3 > p_4$
 $p_3 > p_4$
 $p_3 - p_4 > 0$
 $p_3 - p_4 = d_4 > 0$
- (iv) Tinjau $d_5 > 0$, jika $p_5 > p_6$
 $p_5 > p_6$
 $p_5 - p_6 > 0$
 $p_5 - p_6 = d_5 > 0$

karena $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0, d_4 > 0$ dan $d_5 > 0$ dengan demikian semua nilai eigen dari persamaan karakteristik (22) bernilai negatif yaitu $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0$. Jadi terbukti bahwa sistem (2) bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

3.5 Simulasi Numerik

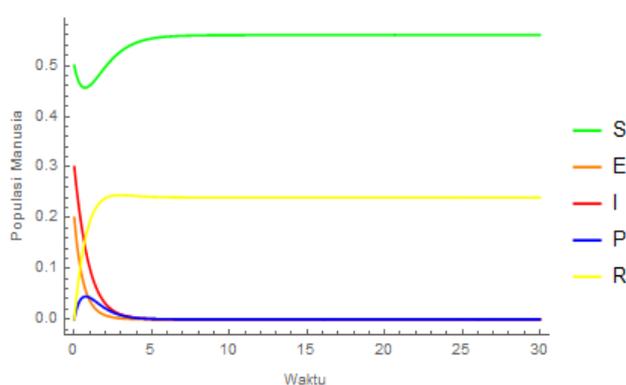
Simulasi terhadap model modifikasi dilakukan untuk melihat dinamika populasi penyebaran penyakit pneumonia dengan menggunakan nilai-nilai yang disajikan pada Tabel 2. Simulasi ini menggunakan bantuan *Software Wolfram Mathematica 11.3* dengan nilai awal $s(0) = 0.5, e(0) = 0.2, i(0) = 0.3, p(0) = 0, r(0) = 0$.

Tabel 2. Nilai parameter untuk kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$

Parameter	Keterangan	Nilai Parameter	
		$R_0 < 1$	$R_0 > 1$
ψ	Laju kelahiran	0.6	0.78
μ	Laju kematian alami	0.75	0.2
ρ	Laju kematian akibat terinfeksi	0.3	0.3
β	Laju individu rentan menjadi individu laten	0.55	0.98
γ	Laju individu laten menjadi individu terinfeksi	0.91	0.95
ξ	Laju individu terinfeksi yang menjalani pengobatan	0.55	0.23
σ	Peluang individu yang menjalani pengobatan kemudian sembuh	0.91	0.95
ω	Peluang individu laten menjadi individu sembuh	0.3	0.2
k	Laju individu sembuh menjadi rentan akibat hilangnya kekebalan tubuh	0.5	0.8
θ	Proporsi individu kelas pengobatan	0.7	0.7
α	Proporsi individu kelas vaksinasi	0.5	0.4

3.5.1 Dinamika Populasi untuk $R_0 < 1$

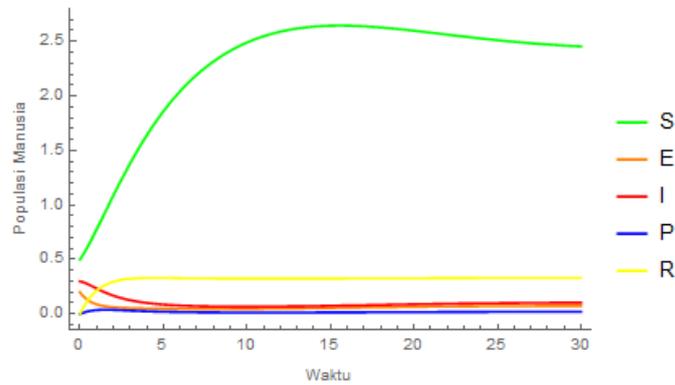
Dinamika populasi pada kondisi $R_0 < 1$ ditunjukkan pada gambar 2 berdasarkan nilai parameter pada tabel 2 dengan nilai $R_0 = 0.0947303$

**Gambar 2.** Dinamika Proporsi Populasi pada Kondisi $R_0 < 1$

Gambar 2 menunjukkan bahwa masing-masing populasi menuju titik tetap tanpa penyakit atau stabil disekitar titik tetap tanpa penyakit. Pada populasi rentan dengan nilai awal 0.5 mengalami penurunan jumlah populasi dari nilai awal kemudian mengalami peningkatan hingga mencapai kondisi stabil disekitar titik $s = 0.56$ atau jumlah populasi rentan sebesar 56% yang berarti 56 orang dalam populasi yang rentan terhadap penyakit pneumonia pada saat memasuki $t = 30$. Sedangkan, populasi laten dengan nilai awal 0.2 mengalami penurunan pada saat $t = 30$ dan stabil pada titik $e = 0$ yang berarti tidak ada individu laten. Pada populasi infeksi mengalami penurunan dari nilai awal 0.3 sampai pada saat memasuki $t = 30$ menjadi stabil di titik $i = 0$ yang berarti tidak ada individu yang terinfeksi. Dan untuk populasi pengobatan mengalami peningkatan kemudian mengalami penurunan jumlah populasi hingga mencapai kondisi stabil disekitar titik $p = 0$ yang artinya tidak ada individu yang memerlukan pengobatan. Adapun populasi sembuh mengalami peningkatan pada titik $r = 0.25$ dan pada waktu tertentu mengalami penurunan jumlah populasi hingga mencapai kondisi stabil di sekitar titik $r = 0.24$ atau populasi sembuh meningkat 24% atau jumlah individu sembuh sekitar 24 orang.

3.5.2 Dinamika Populasi untuk $R_0 > 1$

Dinamika populasi pada kondisi $R_0 > 1$ ditunjukkan pada gambar 3 berdasarkan nilai parameter pada tabel 2 dengan nilai $R_0 = 3.67666$.



Gambar 3. Dinamika Proporsi Populasi pada Kondisi $R_0 > 1$

Gambar 3 menunjukkan bahwa masing-masing populasi menuju titik tetap endemik atau stabil disekitar titik tetap endemik. Pada populasi rentan dengan nilai awal 0.5 mengalami peningkatan jumlah populasi dari nilai awal kemudian menurun sampai saat memasuki $t = 30$ hingga stabil disekitar titik $s = 0.975886$ atau setara dengan 98% yang berarti terdapat sekitar 98 orang yang rentan terhadap penyakit pneumonia. Sedangkan, populasi laten mengalami penurunan jumlah populasi dari nilai awal 0.2 hingga stabil disekitar titik $e = 0.459957$ atau setara dengan 46% yang artinya terdapat 46 individu laten dalam populasi. Pada populasi infeksi mengalami penurunan jumlah populasi dari nilai awal 0.3 dan stabil di sekitar titik $i = 0.649271$ atau setara dengan 65% atau sama dengan 65 individu yang terinfeksi penyakit pneumonia. Dan untuk populasi pengobatan mengalami peningkatan dari nilai awal 0 dan pada waktu tertentu mengalami kenaikan disekitar titik 0.04, kemudian mengalami penurunan jumlah populasi hingga mencapai kondisi stabil disekitar titik $p = 0.129854$ atau setara dengan 13% yang berarti terdapat 13 orang yang memerlukan pengobatan. Adapun populasi sembuh mengalami peningkatan jumlah populasi dari nilai awal 0 hingga mencapai kondisi stabil di sekitar titik $r = 0.43515$ atau setara dengan 0.44% yang berarti terdapat 44 individu sembuh dalam populasi.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan melalui diagram kompartemen diperoleh kesimpulan bahwa model SEIPRS pada penyebaran penyakit pneumonia dengan pengaruh vaksinasi dan pengobatan memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan tanpa penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Pada kondisi $R < 1$ populasi infeksi mengalami penurunan hingga stabil di titik $i = 0$, yang menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang dari populasi. Sedangkan pada kondisi $R > 1$ populasi infeksi mengalami penurunan dan stabil di titik $i = 0.65$, yang menunjukkan bahwa penyakit akan tetap ada dalam populasi. Simulasi numerik yang dilakukan dengan menggunakan nilai-nilai parameter menghasilkan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0.09$ untuk kondisi $R < 1$ dan $R_0 = 3.68$ untuk kondisi $R > 1$.

Referensi

- [1] S. Side, W. Sanusi, and N. A. Bohari, "Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar," *J. Math. Comput. Stat.*, vol. 4, no. 1, p. 1, May 2021, doi: 10.35580/jmathcos.v4i1.20444.
- [2] A. Safitri, N. Nurmadilla, and S. W. Gayatri, "Peranan Multivitamin Pada Pasien Geriatri Dengan Pneumonia," *Wal'afiat Hosp. J.*, vol. 2, no. 1, pp. 63–74, Jun. 2021, doi: 10.33096/whj.v2i1.59.
- [3] B. Hardhana, F. Sibuea, and W. Widiyanti, Eds., *Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2019*.

Jakarta: Kementerian Kesehatan RI, 2020.

- [4] A. D. Susanto and E. Burhan, “Press Realease Perhimpunan Dokter Paru Indonesia (PDPI) Outbreak Pneumonia Di Tiongkok,” Jakarta, 2020.
- [5] O. J. Otieno, M. Joseph, and O. Paul, “Mathematical model for pneumonia dynamics with carriers,” *Int. J. Math. Anal.*, vol. 7, pp. 2457–2473, 2013, doi: 10.12988/ijma.2013.35109.
- [6] H. Rahmawati, “Analisa Kestabilan Model Matematika Penyakit Pneumonia Dengan Carriers,” *J. Mhs. Mat. Undip*, vol. 4, no. 2, 2015.
- [7] F. Malorung, M. Blegur, R. M. Pangaribuan, and M. Z. Ndi, “Analisis Sensitivitas Model Matematika Penyebaran Penyakit Dengan Vaksinasi,” *J. Mat. Integr.*, vol. 14, no. 1, p. 9, Apr. 2018, doi: 10.24198/jmi.v14.n1.16000.9-15.
- [8] K. S. Rahman, S. R. Mitkari, and S. Shaikh, “Modeling the Impact of Vaccination, Screening, Treatment on the Dynamics of Pneumonia,” *J. Sci. Res.*, vol. 12, no. 4, pp. 525–536, Sep. 2020, doi: 10.3329/jsr.v12i4.45815.
- [9] R. S. Imran, R. Resmawan, N. Achmad, and A. R. Nuha, “SEIPR-Mathematical Model of the Pneumonia Spreading in Toddlers with Immunization and Treatment Effects,” *J. Mat. Stat. dan Komputasi*, vol. 17, no. 2, pp. 202–218, Dec. 2020, doi: 10.20956/jmsk.v17i2.11166.
- [10] J. A. Walters, J. N. Q. Tang, P. Poole, and R. Wood-Baker, “Pneumococcal vaccines for preventing pneumonia in chronic obstructive pulmonary disease,” *Cochrane Database Syst. Rev.*, vol. 2019, no. 3, Jan. 2017, doi: 10.1002/14651858.CD001390.pub4.
- [11] P. van den Driessche and J. Watmough, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission,” *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 29–48, Nov. 2002, doi: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.
- [12] R. Resmawan and N. Nurwan, “Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan,” *J. Mat. Integr.*, vol. 13, no. 2, p. 105, Sep. 2017, doi: 10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114.
- [13] M. R. Husain, N. Nurwan, and R. Resmawan, “Analisis Kestabilan Model Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi,” *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 14, no. 1, pp. 69–78, Mar. 2020, doi: 10.30598/barekengvol14iss1pp069-078.
- [14] R. Resmawan and L. Yahya, “Sensitifity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission,” *CAUCHY*, vol. 6, no. 2, p. 91, May 2020, doi: 10.18860/ca.v6i2.9165.
- [15] J. K. Hale and H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, vol. 3. New York: Springer, 1991 [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-4426-4>